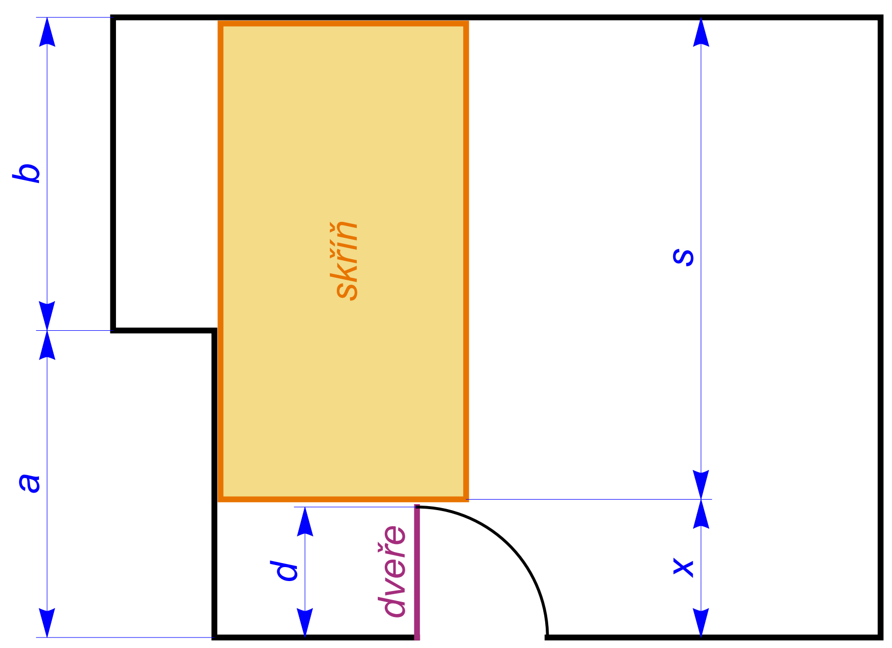
Rozdělení pravděpodobnosti spojitých náhodných veličin

Zadání

V obdélníkovém pokoji je výklenek, který je zakryt velkou skříní. Naproti skříni jsou dveře, které se otevírají dovnitř. Rozměry pokoje, skříně a dveří udávají délky a, b, s, d, x — viz. obrázek 1.



Obrázek 1: půdorys pokoje se skříní

Délkám a, b, s, d, x odpovídají spojité náhodné veličiny A, B, S, D, X. Rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin A, B, S, D jsou zadána prostřednictvím hustot pravděpodobnosti f_A, f_B, f_S, f_D.

Po určité době od stanovení rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin A, B, S vzniklo podezření, že někdo manipuloval se skříní (chtěl si něco vzít z výklenku). Aby bylo možno toto podezření prověřit, byla změřena délka x. Měření bylo provedeno několikrát nezávisle jedním přístrojem za stálých podmínek, které zaručily stejnou přesnost přístroje v průběhu celého měření. Chyby měření mají tedy náhodný charakter. Odpovídá jim spojitá náhodná veličina $\mathcal{E}_X$. Předpokládáme, že rozdělení pravděpodobnosti měřických chyb $\mathcal{E}_X$ je známo.

Dále předpokládáme, že náhodné veličiny $\mathcal{E}_X$, X, A, B, S, D mají normální rozdělení pravděpodobnosti.

Náhodná veličina $U, U \in \{\mathcal{E}_X, X, A, B, S, D\}$, má tedy normální rozdělení pravděpodobnosti s parametry μ_U, σ_U, tzn.

$$U \sim \mathcal{N}(\mu_U, \sigma_U^2)\ .$$

Požadujeme, aby parametr σ_U byl roven směrodatné odchylce diskrétního rozdělení pravděpodobnosti z minulé úlohy. Rovněž požadujeme, aby parametr μ_U odpovídal střední hodnotě diskrétního rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny U z minulé úlohy, tzn. $\mu_U = E(U) =: \bar{u}$. Symbol u zastupuje některou z veličin ε_X, x, a, b, s, d, tzn. $u \in \{\varepsilon_X, x, a, b, s, d\}$. Navíc požadujeme, aby $\bar{\varepsilon}_X = 0$, i kdyby střední hodnota náhodné veličiny $\mathcal{E}_X$ z minulé úlohy vyšla nenulová (lichý počet $n_{\mathcal{E}_X}$).

Součet spojitých náhodných veličin A, B je opět spojitá náhodná veličina; označíme ji C. Její hustotu pravděpodobnosti f_C lze určit podobně jako u součtu diskrétních náhodných veličin podle vztahu

$$f_C(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_A(a)\, f_B(x-a)\, da \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}\ . \tag{1}$$

Pro normálně rozdělené náhodné veličiny $A \sim \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$, $B \sim \mathcal{N}(\mu_B, \sigma_B^2)$ platí, že rozdělení pravděpodobnosti jejich součtu $A + B =: C$ je opět normální.

$$C \sim \mathcal{N}(\mu_A + \mu_B,\ \sigma_A^2 + \sigma_B^2)$$

To lze snadno dokázat pomocí vztahu (1).

Podobně se určí i pravděpodobnost rozdílu spojitých náhodných veličin.

Úkoly

1. Určete střední hodnoty normálně rozdělených náhodných veličin A, B, S, D tak, aby byly stejné jako střední hodnoty diskrétních náhodných veličin A, B, S, D z minulé úlohy. Určete směrodatné odchylky normálně rozdělených náhodných veličin A, B, S, D tak, aby byly stejné jako směrodatné odchylky diskrétních rozdělení, které byly dány v minulé úloze. Položte $d := 900$ mm.

2. Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $A + B - S$ a nakreslete jeho hustotu pravděpodobnosti.

3. Jaká je pravděpodobnost, že půjdou otevřít dveře dokořán, aniž by narazily do skříně?

4. Určete směrodatnou odchylku chyb měření $\sigma_{\mathcal{E}_X}$ tak, aby byla stejná jako směrodatná odchylka binomického rozdělení $\mathrm{Bi}(n_{\mathcal{E}_X},\, q_{\mathcal{E}_X})$ z minulé úlohy. Dále předpokládejte, že chyby měření mají normální rozdělení pravděpodobnosti

$$\mathcal{E}_X \sim \mathcal{N}(0,\, \sigma^2_{\mathcal{E}_X})\ .$$

Zvolte $x^* \doteq 900$ mm stejně jako v minulé úloze. Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny $X = x^* + \mathcal{E}_X$, tzn.

$$X \sim \mathcal{N}(x^*, \sigma^2_X)\ , \quad \sigma_X = \sigma_{\mathcal{E}_X}\ .$$

Vygenerujte několik měření z rozdělení $\mathcal{N}(x^*, \sigma^2_X)$ a zapomeňte hodnotu x^*. Určete aposteriorní rozdělení pravděpodobnosti **parametru polohy** náhodné veličiny X pomocí Bayesovy věty. Apriorní rozdělení předpokládejte rovnoměrné na množině reálných čísel, tzv. **neinformativní rozdělení pravděpodobnosti**. Nakreslete hustotu pravděpodobnosti **parametru polohy** náhodné veličiny X. Vypočtěte modus rozdělení pravděpodobnosti **parametru polohy** náhodné veličiny X a vzpomeňte si na hodnotu x^*. Obě tyto hodnoty porovnejte. Vygenerujte další soubor měření z rozdělení $\mathcal{N}(x^*, \sigma^2_X)$, tentokrát s větším počtem hodnot, a znovu vypočtěte modus rozdělení pravděpodobnosti **parametru polohy** náhodné veličiny X. Jak se mění hodnota modu rozdělení pravděpodobnosti **parametru polohy** náhodné veličiny X v porovnání se skutečnou hodnotou x^* při zvyšování počtu měření?

5. Pro různé soubory měření s odlišným počtem měřených hodnot vypočtěte pravděpodobnost, že skříň byla posunuta. Který z vypočtených údajů je nejspolehlivější?

11. prosince 2017

Lubomír Soukup

`soukup@utia.cas.cz`