

Řešení zápočtového testu

1 A

1.1 Zákon hromadění směrodatných odchylek

Rovinný trojúhelník je zadán dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným. Hodnoty zadaných veličin a jejich směrodatné odchylky jsou uvedeny v následující tabulce.

veličina	hodnota	směrodatná odchylka
strana a	175.25 m	0.12 m
strana b	193.70 m	0.15 m
úhel γ	43.5792 gon	0.0080 gon

Určete směrodatnou odchylku plochy trojúhelníka.

Řešení

1. Obsah trojúhelníka: $S(a, b, \gamma) = \frac{1}{2} a b \sin(\gamma)$

2. Volba označení a fyzikálních jednotek:

- $\tilde{a} := 175.25$ m,
- $\tilde{b} := 193.70$ m,
- $\widehat{\gamma} := \frac{\pi}{200} 43.5792$ gon = 0.68454 rad,
- $\sigma_a := 0.12$ m,
- $\sigma_b := 0.15$ m,
- $\sigma_\gamma := \frac{\pi}{200} 0.0080$ gon = $1.256637 \cdot 10^{-4}$ rad,
- směrodatná odchylka plochy trojúhelníka: $\sigma_S = ?$

3. Zákon hromadění směrodatných odchylek:

$$\begin{aligned}\sigma_S &= \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial a}(\tilde{a}, \tilde{b}, \widehat{\gamma}) \cdot \sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b}(\tilde{a}, \tilde{b}, \widehat{\gamma}) \cdot \sigma_b\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \gamma}(\tilde{a}, \tilde{b}, \widehat{\gamma}) \cdot \sigma_\gamma\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\tilde{b} \sin(\widehat{\gamma}) \cdot \sigma_a\right)^2 + \left(\tilde{a} \sin(\widehat{\gamma}) \cdot \sigma_b\right)^2 + \left(\tilde{a} \tilde{b} \cos(\widehat{\gamma}) \cdot \sigma_\gamma\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{15001.3 \cdot 0.0144 + 12279.6 \cdot 0.0225 + 691597281 \cdot 1.5791 \cdot 10^{-8}} \text{ m}^2\end{aligned}$$

4. Odpověď: $\sigma_S = 11.22$ m².

1.2 Vyrovnání

Mezi třemi body, P_1 , P_2 , P_3 , ležícími v jedné přímce, byly změřeny délky $s_{1,2}$, $s_{1,3}$, $s_{2,3}$, každá několikrát. Výsledky měření jsou uvedeny v následující tabulce. V posledním sloupci tabulky jsou směrodatné odchylky měřených délek.

i	j	$s_{i,j}$	$\sigma_{i,j}$
1	2	17.349 m	0.004 m
		17.341 m	
		17.352 m	
2	3	11.962 m	0.003 m
		11.957 m	
		11.959 m	
		11.963 m	
1	3	29.309 m	0.006 m
		29.302 m	

- Vyrovnajte všechny zadané měřené délky metodou nejmenších čtverců tak, abyste určili délky dvou úseků mezi body P_1 , P_3 . Vypočtete vyrovnané délky úseků $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$.
- Jak byste odhadl/a přesnost výsledných vyrovnaných hodnot?

2 B

2.1 Zákon hromadění směrodatných odchylek

Rovinný trojúhelník je zadán dvěma úhly a stranou mezi jejich vrcholy. Hodnoty zadaných veličin a jejich směrodatné odchylky jsou uvedeny v následující tabulce.

veličina	hodnota	směrodatná odchylka
úhel α	50.5792 gon	0.0010 gon
úhel β	49.4318 gon	0.0010 gon
strana c	150.45 m	0.03 m

Určete směrodatnou odchylku strany proti menšímu úhlu.

Řešení

1. Vyjádření strany b trojúhelníka pomocí sinové věty: $b(\alpha, \beta, c) = \frac{c \sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$
2. Volba označení a fyzikálních jednotek:
 - $\hat{\alpha} := \frac{\pi}{200} 50.5792 \text{ gon} = 0.794496 \text{ rad}$,

- $\widehat{\beta} := \frac{\pi}{200} 49.4318 \text{ gon} = 0.776473 \text{ rad}$,
- $\tilde{c} := 150.45 \text{ m}$,
- $\sigma_\alpha := \frac{\pi}{200} 0.0010 \text{ gon} = 1.570796 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$,
- $\sigma_\beta := \frac{\pi}{200} 0.0010 \text{ gon} = 1.570796 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$,
- $\sigma_c := 0.03 \text{ m}$,
- směrodatná odchylka strany b trojúhelníka: $\sigma_b = ?$.

3. Zákon hromadění směrodatných odchylek:

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial \alpha}(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \tilde{c}) \cdot \sigma_\alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial \beta}(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \tilde{c}) \cdot \sigma_\beta\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial c}(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \tilde{c}) \cdot \sigma_c\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{c \sin(\beta) \cos(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \cdot \sigma_\alpha\right)^2 + \left(\frac{c \sin(\alpha)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \cdot \sigma_\beta\right)^2 + \left(\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \sigma_c\right)^2} = \\ &= \sqrt{0.000331862 \cdot 2.46740 \cdot 10^{-10} + 11523.5 \cdot 2.46740 \cdot 10^{-10} + 0.491075 \cdot 0.0009 \text{ m}} \end{aligned}$$

4. Odpověď: $\sigma_b = 0.021 \text{ m}$.

2.2 Vyrovnání

Výška barevně odlišeného segmentu válcového komína byla určena trigonometricky pomocí zenitových úhlů změřených ze dvou stanovisek. Vodorovné vzdálenosti stanovisek od paty komína a měřené hodnoty zenitových úhlů spolu s jejich směrodatnými odchylkami jsou uvedeny v následující tabulce.

i	j	s_i	$z_{i,j}$	$\sigma_{z,i,j}$
1	1	23.28 m	90.2323 gon	0.0012 gon
1	2	23.28 m	59.4917 gon	0.0016 gon
2	1	30.08 m	93.4629 gon	0.0012 gon
2	2	30.08 m	67.6813 gon	0.0014 gon

Vzdálenosti stanovisek od paty komína považujte za bezchybné.

- Měřené zenitové úhly vyrovnejte metodou nejmenších čtverců a vypočtete výšku segmentu komína.
- Jak byste odhadl/a přesnost vyrovnané výšky segmentu?

9. ledna 2018
Lubomír Soukup
soukup@utia.cas.cz